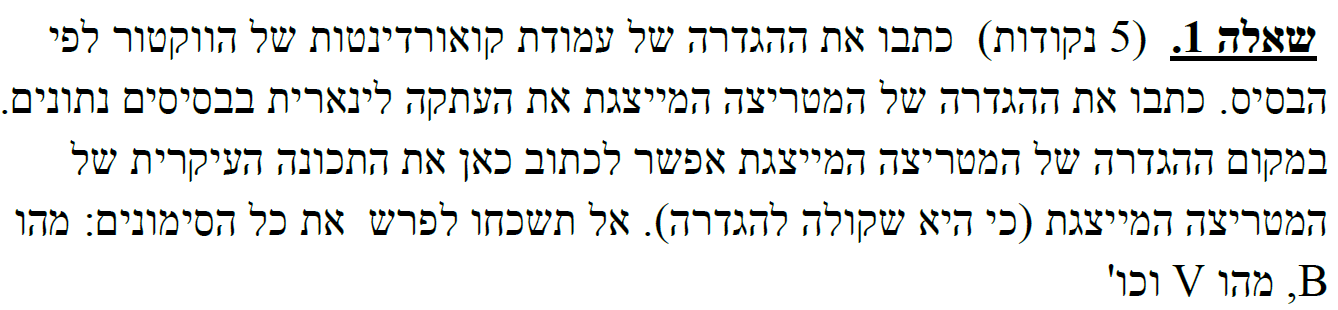
**ליניארית 2 - מרתון 9.1**

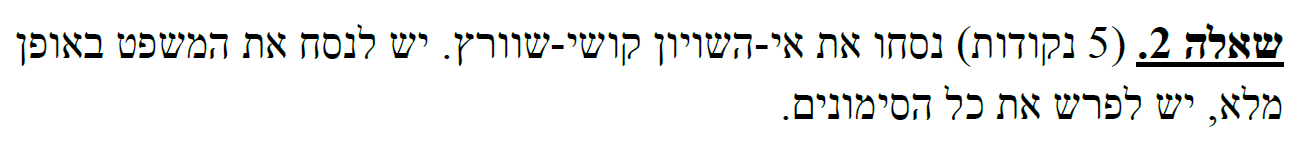
**פתרון - מבחן 2021 מועד ב**



פתרון:

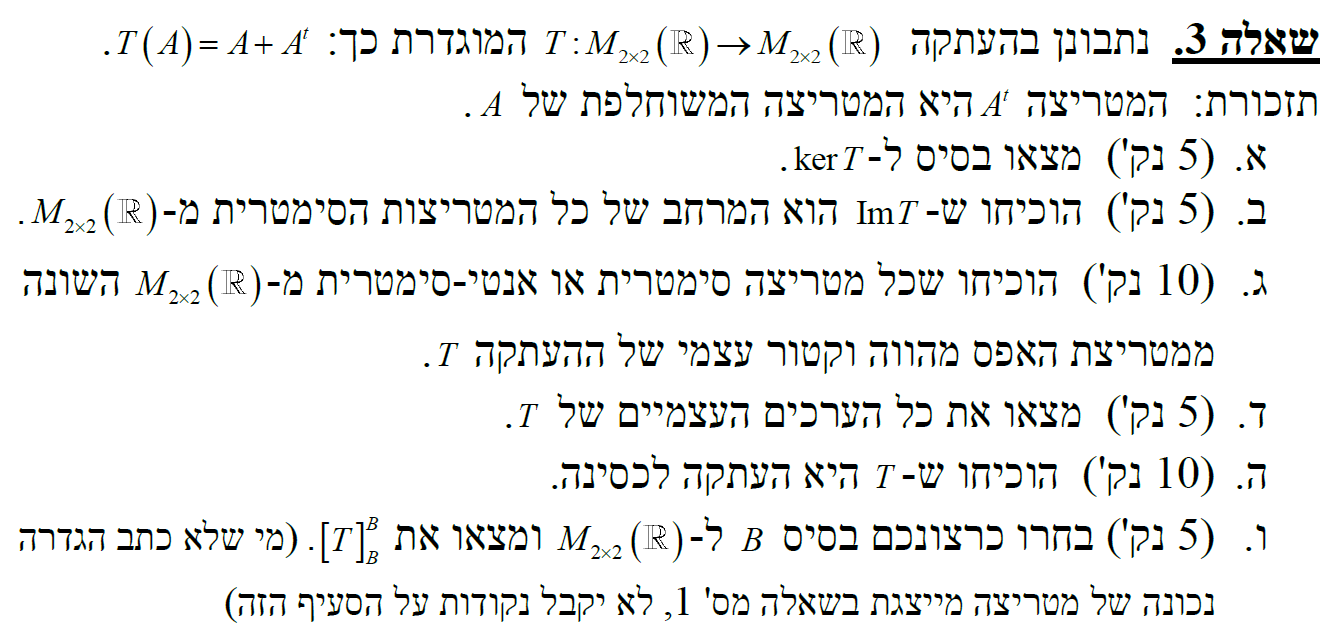
בהינתן בסיס , עמודת קואורינטות של לפי בסיס היא:  *כאשר: . כאשר הם סקלרים.*

*בהינתן בסיס ל ובסיס ל . המטריצה המייצגת של העתקה ליניארית בין הבסיסים הללו היא: .*

**

*פתרון:*

*יהי מרחב מכפלה פנימית. ויהיו אזי: . כאשר: .*

**

*פתרון:*

1. *נדרוש: . נסמן:   
   ונקבל: .  
   מכאן נקבל את המערכת: ומכאן: .*

*מכאן נציב: ונקבל את הבסיס: .*

1. *נשים לב שכל מטריצה ב היא מהצורה:  
    ומטריצת התוצאה היא מטריצה סימטרית. נותר להוכיח הכלה בכיוון השני. תהי מטריצה סימטרית.  
   מכאן: ולכן: ולכן ניקח לדוגמא את המטריצה: ונקבל: .*
2. *תהי מטריצה סימטרית. אזי: ולכן 2 הוא ע"ע של T ולכן A היא וקטור עצמי של T.  
   תהי מטריצה אנטי סימטרית אזי: . ולכן: ולכן 0 הוא ע"ע של T ולכן היא וקטור עצמי של T.*
3. *מכיוון שבסעיף ג' הוכחנו שכל מטריצה סימטרית היא ו"ע של T וגם כל מטריצה אנטי סימטרית. נקבל:  
   מימד מרחב המטריצות הסימטריות הוא 3 כי כל מטריצה סימטרית מסדר 2 היא מהצורה: כאשר חופשיים. ולכן הריבוי הגיאומטרי של ע"ע 2 הוא 3.  
   מימד מרחב המטריצות האנטי סימטריות הוא 1 כי כל מטריצה אנטי סימטרית מסדר 2 היא מהצורה: כאשר חופשי. ולכן הריבוי הגיאומטרי של ע"ע 0 הוא 1.  
   סה"כ סכום הריבויים הגיאומטריים הוא 4 = סדר של ולכן לא ייתכנו ע"ע נוספים כי סכום כל הר"ג (ריבוי הגיאומטרי) הוא לכל היותר סדר המטריצה המייצגת.*

*חישוב ע"ע בדרך הרגילה:*

*. נמצא ע"ע:*

*ומכאן: .*

1. *עבור כל ע"ע הריבוי האלגברי והגיאומטרי שווים ובנוסף סכום הריבויים הוא 4 = מימד המטריצה מייצגת ולכן המטריצה לכסינה לפי המשפט.*
2. *ניקח: .  
   מכאן בסיס כי יש בו 4 מטריצות מסדר 2 על 2 בת"ל.*

*ומכאן:*

*המערכת:*

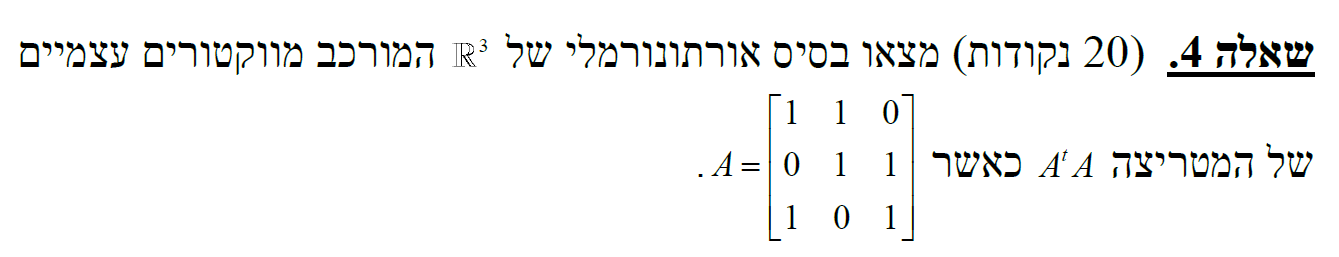
*מכאן: ולכן: .*

*מכאן: ולכן: .*

*מכאן: ולכן: .*

*מכאן: ולכן: .*

*ומכאן: .*

**

*פתרון:*

*נחשב:*

*מכאן, נמצא ע"ע:*

*מכאן: .*

*ומכאן:*

*עבור: נקבל: ומכאן הבסיס לווקטורים העצמיים של 1 הוא: כאשר הווקטור הראשון מתקבל ע"י: והשני ע"י:*

*עבור: נקבל:  
 ומכאן הבסיס לווקטורים העצמיים של 4 הוא: כאשר הווקטור הראשון מתקבל ע"י: .*

*לכן: .*

*נהפוך לאורתוגונאליים ע"י תהליך גרם שמידט:*

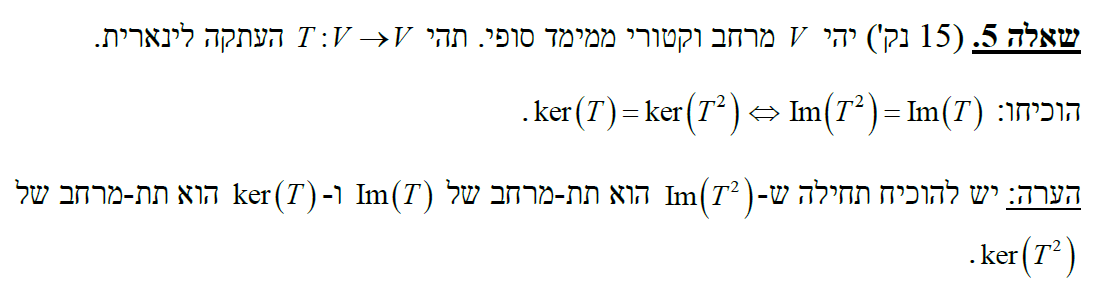
*ניקח: .*

*.*

*נותר לנרמל:*

*ולכן:*

*הבסיס האורתונורמאלי הוא: .*

**

*פתרון:*

*כיוון 1: נניח ש .*

*נוכיח תחילה ש ונשים לב ששניהם מרחבים ולכן יהיה תת מרחב של .*

*יהי . מכאן, קיים כך ש: . נסמן: ומכאן: ולפי הגדרת*

*נקבל ש .*

*כעת, לפי משפט המימדים:*

*וגם*

*לכן:   
לפי ההנחה . ובפרט: .*

*ולכן: .*

*כעת לפי משפט: אם וגם אזי: . נקבל: .*

*כיוון 2: נניח ש .*

*נוכיח תחילה ש ונשים לב ששניהם מרחבים ולכן יהיה תת מרחב של .*

*יהי . מכאן, ולכן: ולכן: .*

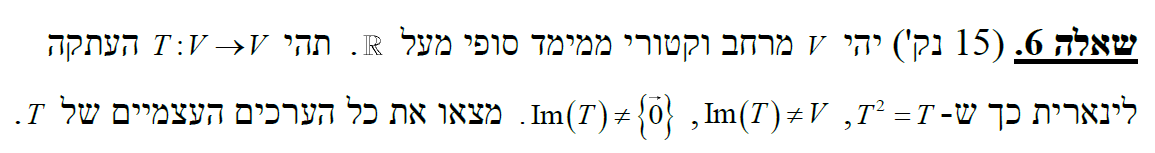
*כעת, לפי משפט המימדים:*

*וגם*

*לכן:   
לפי ההנחה . ובפרט: .*

*ולכן: .*

*כעת לפי משפט: אם וגם אזי: . נקבל: .*

**

*פתרון:*

*לפי הגדרת ע"ע, אנו מחפשים כך שקיים וקטור המקיים: .*

*מכאן: .*

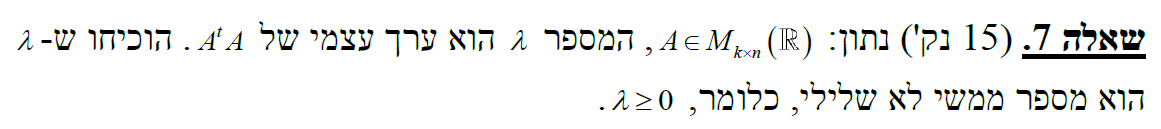
*לפי הנתון ש נקבל: ולכן: ומכאן: ולכן: כי ולכן: או הם המועמדים היחידים לע"ע.*

*היות ו מתקיים: ולפי משפט   
המימדים: נקבל: .*

*לכן יש וקטור שהוא לא וקטור ה 0. כלומר: ובזה הוכחנו ש 0 הוא ע"ע של T.*

*בנוסף, נתון כי ולכן קיים וקטור כך שקיים וקטור כך ש:*

*לפי הנתון ש נקבל: ומכאן: .*

**

*פתרון:*

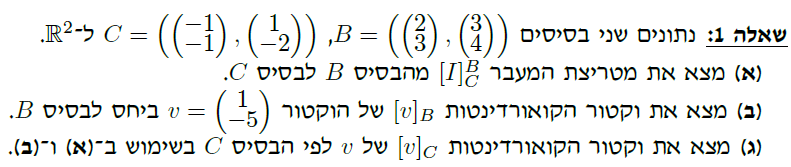
*הגדרה של מ"פ היא: .*

*לפי הנתון, קיים ו"ע המתאים לע"ע כלומר: .*

*מכאן:*

*מכאן: .*

**פתרון - מבחן 2021 מועד א**

**

*פתרון:*

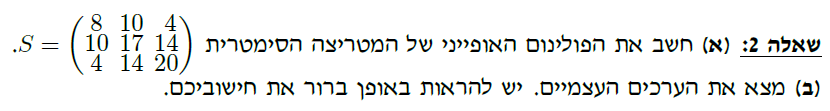
1. *נמצא את עמודת הקואורינטות של כל אחד מוקטורי בסיס B לפי בסיס C.*

*מכאן: ומכאן: נחסר ונקבל: ולכן:*

*ולכן: .  
עמודה שנייה: ומכאן: נחסר ונקבל: ולכן:*

*ולכן: .  
סה"כ מטריצת המעבר היא: .*

1. *ומכאן: ומכאן: . נחסר ונקבל: ולכן: . ומכאן: .*
2. *מתקיים: .*

**

*פתרון:*

*.*

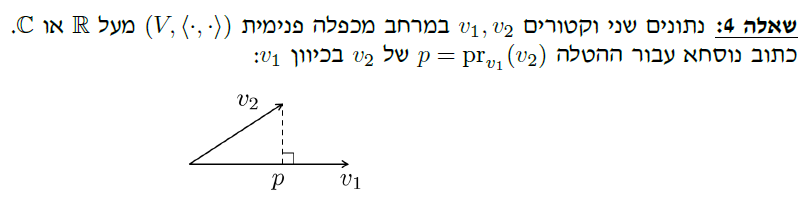
1. *נשווה את הפולינום האופייני ל 0 ונקבל: ומכאן: ולכן: . או ולפי נוסחת השורשים: ומכאן: .*

**

*פתרון:*

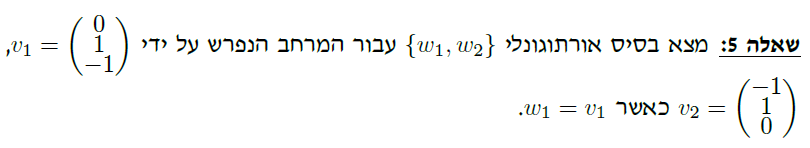
*מ"ו ייקרא מרחב מכפלה פנימית אם קיימת פונקציה: המקיימת:*

1. *אדיטיביות בגורם הראשון: לכל מתקיים: .*
2. *הומוגניות בגורם הראשון: לכל ולכל סקלר מתקיים: .*
3. *הרמיטיות (סימטריות): לכל מתקיים: .*
4. *חיוביות לחלוטין: לכל מתקיים: וגם אם"ם .*

**

*פתרון:*

*נוסחת ההטלה היא: .*

**

*פתרון:*

*נשתמש באיטרציה אחת של תהליך גרם שמידט:*

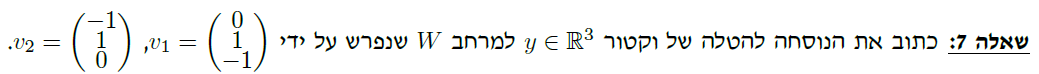
*הבסיס הוא: .*

**

*פתרון:*

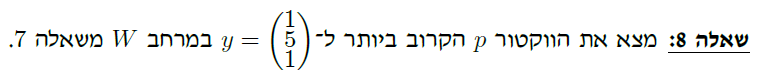
*ננרמל את וקטורי הבסיס שמצאנו:*

*.*

**

*פתרון:*

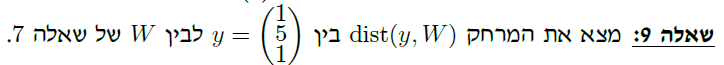
*הנוסחא היא לבצע הטלה של לוקטורי הבסיס האורתוגונאליים: . כלומר: .*

**

*פתרון:*

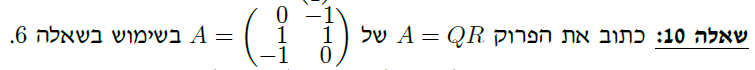
*כדי לחשב את הוקטור הקרוב ביותר ל y מורידים היטל של y למרחב W וההיטל הוא הוקטור הקרוב ביותר.*

*מציבים בנוסחא משאלה 7:*

**

*פתרון:*

*המרחק של y מהמרחב W הוא למעשה המרחק של y מההיטל שלו:*

**

*פתרון:*

*לוקחים את העמודות של A כבסיס ומוצאים לפי גרם שמידט בסיס אורתונורמאלי.*

*הבסיס שמצאנו זה Q (בעמודות).*

*זה נובע מהגדרת מטריצה אורתוגונאלית:*

*זו מטריצה המקיימת: ואם היא ריבועית אז היא מקיימת את התכונות הבאות:*

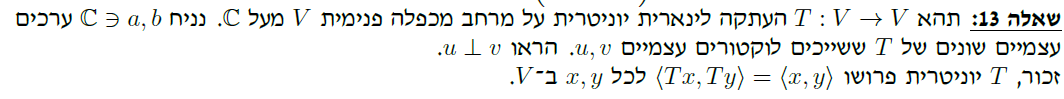
1. *כל עמודות המטריצה מהוות וקטורים אורתונורמאלים זה לזה.*
2. *ההופכית שווה למשוחלפת: .*
3. *הדטרמיננטה היא 1 או מינוס 1.*
4. *בפרט המטריצה הפיכה. וכל העמודות בת"ל*

*לפי שאלה 6:*

*.*

*ומכאן: .*

*בדיקה:*

**

*פתרון:*

*צ"ל: .*

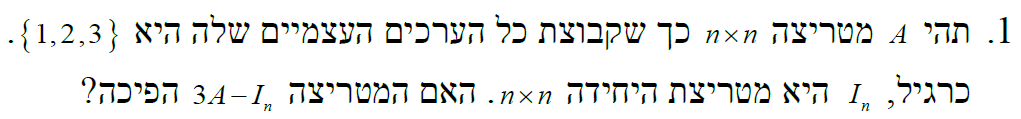
*מכאן: .*

*מכאן:*

*מכיוון שבהעתקה יוניטרית כל הע"ע הם ממשיים.*

*לכן: נתון ש a,b ולכן: .*

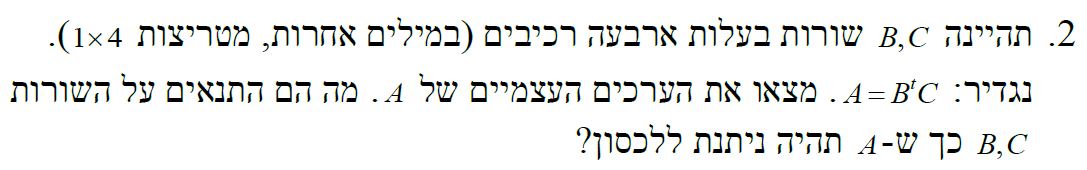
***פתרון מטלה 3***

**

*פתרון:*

*נניח ש לא הפיכה ולכן: ומכאן: ומכאן: הוא גם ע"ע של .*

*סתירה כי הע"ע היחידים הם אלו המנויים לעיל ולכן הפיכה.*

**

*פתרון:*

*נסמן: ומכאן: .*

*המטריצה לא הפיכה ולכן 0 הוא ע"ע שלה. כי .*

*ריבוי גיאומטרי של 0 הוא 3 כי:*

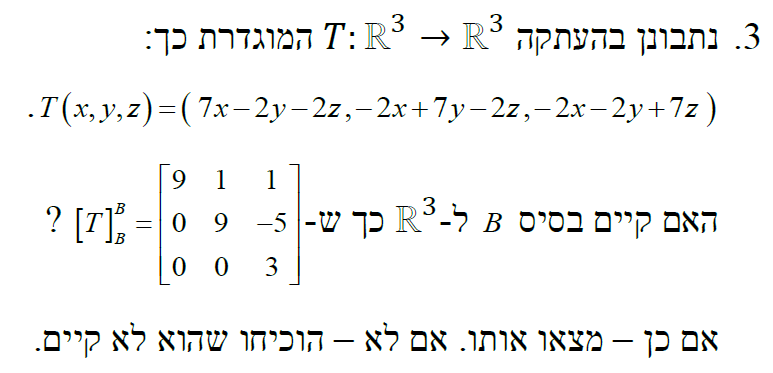
*לפי המשפט: אם כל הר"א שווים לר"ג וסכום הריבויים הוא מימד המטריצה אזי היא לכסינה.*

*אם יש 0 בריבוי 3 והמטריצה לכסינה אזי היא דומה למטריצה אלכסונית.*

*למטריצות דומות יש את אותו trace ולכן: .*

*במטריצה האלכסונית הדומה יהיו 3 אפסים על האלכסון (כי 0 בריבוי 3) ורק איבר 1 שהוא   
ומכאן: .*

*התנאי: אם אז לפחות B או C הן שורות 0.*

**

*פתרון:*

*תחילה נשים לב ש: .*

*מכאן:*

*מכאן: .*

*מכאן: .*

*נחזור לאילוץ הראשון: ומכאן: .*

*סתירה כי זה לא וקטור בסיס.*

*לכן לא קיים בסיס כזה.*